数理解析研究所講究録
533巻 1984年 3-21

Cohomological Characterization of Regular Singularities in Several Variables

東大理 真島 秀行 (Hideyuki Majima)

本講演は Y. Sibuya (Minnesota 大)教授との共同研究に基づくものである。

1. 序論. 常微分方程式の確定特異点の概念は本質的に B. Riemann, 決定的に L. Fuchs によって導入された。複素平面 $\mathbb{C}$ の点 a の近傍 U をとる。$U-\{a\}$ で正則で a に極を持つような函数を係数とする常微分方程式系 $(\frac{d}{dx}-A(x))u=0$ は、$U-\{a\}$ で正則な可逆行列函数 $P(x)$ と定数行列 C を適当にとると、$\Phi(x)=P(x)(x-a)^C$ という形の基本解行列を持つ。ここで, $P(x)$ が $x=a$ を高々極とするとき, 点 a は常微分方程式系の確定特異点であると定義された。今日, 常微分方程式に対するこの概念は, いくつかの種類の条件で特徴付けられることが知られている。大きく分けて四種類あると思われる。

<u>RS1</u>. 局所解の増大条件 (Growth condition for solutions)

a を頂点とする開き角が有限の任意の角領域 S とそれ

上の正則解 $f(x)$ に対し

$$|f(x)| = O(|x-a|^{-N}) \quad \text{for some } N \geq 0 \text{ as } x \text{ tends to } a \text{ in } S$$

<u>RS2.</u>　代数的条件（algebraic condition）

いろいろとあるが本質的には次の条件である。或る有理形函数係数の変数変換　$u = T(x)v$　によって微分方程式系は　$\left(\frac{d}{dx} - \frac{B(x)}{x-a}\right)v = 0$　に変換される。ここで，$B(x)$ は $x=a$ で正則である。とくに

$$A(x) = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & -a_{m-1}(x) \end{bmatrix} \quad (a_i(x) \text{ は } V-\{a\} \text{ で正則で } a \text{ に極をもつ})$$

のとき，すなわち，単独高階常微分方程式

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m w + a_{m-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} w + \cdots + a_0(x) w = 0$$

を考えるとき、任意の $i = 0, 1, \cdots, m-1$ に対して $(x-a)^{m-i} a_i(x)$ が $x=a$ で正則である，という条件になる。

任意の常微分方程式系は有理型変換により単独高階常微分方程式に変換されうることを注意しておく。

<u>RS3.</u>　$\mathcal{O}_a = \mathbb{C}\{\{(x-a)\}\}$, $K_a = \mathcal{O}_a[(x-a)^{-1}]$, $\mathcal{S}_a = (K_a)^m$ とおくと，$D = \frac{d}{dx} - A(x)$ は，$\mathcal{S}_a$ から $\mathcal{S}_a$ への $\mathbb{C}$ 線型写像で Leibnitz の規則 $D(fu) = \frac{df}{dx}u + fDu$　$(f \in K_a,\ u \in \mathcal{S}_a)$ をみたす。$\hat{\mathcal{O}}_a = \mathbb{C}[[(x-a)]]$ $\hat{K}_a = \hat{\mathcal{O}}_a[(x-a)^{-1}]$, $\hat{\mathcal{S}}_a = (\hat{K}_a)^m$　とおくと，D は $\hat{\mathcal{S}}_a$ から $\hat{\mathcal{S}}_a$ への $\mathbb{C}$ 線型写像で Leibnitz の規則をみたすもの $\hat{D}$ を定める。このと

き、確定特異性を特徴付ける条件は

$$\mathrm{Ker}\, D \simeq \mathrm{Ker}\, \hat{D} \quad \text{and} \quad \mathrm{Coker}\, D \simeq \mathrm{Coker}\, \hat{D}$$

となる。或いは，Ω_a^1 を a における正則一次形式の芽のなす環として，$\nabla = d - A(x)$ を $\mathcal{S}_a$ 上の接続

$$\nabla : \mathcal{S}_a \to \mathcal{S}_a \otimes \Omega_a^1 \quad (\nabla(fu) = u \otimes df + f\nabla u,\ f \in \mathcal{K}_a,\ u \in \mathcal{S}_a)$$

とみるとき，$\hat{\nabla} : \hat{\mathcal{S}}_a \to \hat{\mathcal{S}}_a \otimes \Omega_a^1$ も定義できるが、これらを De Rham 複体 $(\mathcal{S}_a \otimes \Omega_a^{\cdot}, \nabla)$, $(\hat{\mathcal{S}}_a \otimes \Omega_a^{\cdot}, \hat{\nabla})$ とみて

$$H^i((\mathcal{S}_a \otimes \Omega^{\cdot}, \nabla)) \simeq H^i((\hat{\mathcal{S}}_a \otimes \Omega^{\cdot}, \hat{\nabla})) \quad i = 0, 1$$

という条件になる。

E_a を $(x-a)$ に関する収束 Laurent 級数全体のなす環とするとき自然に $\nabla^E : \mathcal{S}_a^E \to \mathcal{S}_a^E \otimes \Omega_a^1$ $(\mathcal{S}_a^E \simeq E_a^m)$ が定義され，これをまた De Rham 複体 $(\mathcal{S}_a^E \otimes \Omega_a^{\cdot}, \nabla^E)$ とみて，

$$H^i((\mathcal{S}_a \otimes \Omega^{\cdot}, \nabla)) \simeq H^i((\mathcal{S}_a^E \otimes \Omega_a^{\cdot}, \nabla^E)) \quad i = 0, 1$$

という条件も同値である。これらの条件を比較定理の成立 (validity of cohomology comparison theorem) という。

さらに、商複体

$$(\tilde{\mathcal{S}}_a \otimes \Omega_a^{\cdot}, \tilde{\nabla}) : \ 0 \to \tilde{\mathcal{S}}_a \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \tilde{\mathcal{S}}_a \otimes \Omega_a^1 \to 0 \quad (\tilde{\mathcal{S}}_a = \hat{\mathcal{S}}_a / \mathcal{S}_a)$$

$$(\tilde{\mathcal{S}}_a^E \otimes \Omega_a^{\cdot}, \tilde{\nabla}^E) : \ 0 \to \tilde{\mathcal{S}}_a^E \xrightarrow{\tilde{\nabla}^E} \tilde{\mathcal{S}}_a^E \otimes \Omega_a^1 \to 0 \quad (\tilde{\mathcal{S}}_a^E = \mathcal{S}_a^E / \mathcal{S}_a)$$

や，a に近づくとき 0 に漸近展開可能な函数の芽の層 $\mathcal{A}_0$ が S^1 上に定義されているのでそれ上に ∇ が自然に定義する接続

$$\nabla_0 : \mathcal{A}_0^m \to \mathcal{A}_0^m \otimes \Omega_a^1$$

を考えると

RS4. コホモロジーの消滅条件 (validity of cohomology vanishing)

$$H^0((\hat{\mathcal{S}}_a\otimes\Omega_a^{\cdot},\hat{\nabla}))=0$$

$$H^0((\hat{\mathcal{S}}_a^E\otimes\Omega_a^{\cdot},\hat{\nabla}^E))=0$$

or

$$H^1(S^1,\mathrm{Ker}\,\nabla_0)=0$$

という条件を得る。

多変数の場合に、確定特異性ないしFuchs性の概念は、上記の(RS1−3)の条件に類するものとして、何人かの数学者によって提唱された。R. Gérard はPfaff方程式系に対しRS1的条件でFuks性を定義した。P. Deligne は有理接続に対しRS1またはRS2的条件で確定特異性を定義し，そのときRS3的条件が成立することを示した。A. Van Den Essen はRS2的条件でFuchsian $\mathcal{D}$-modulesを，J.P. Ramis と Mebkhout とは独立にholonomic $\mathcal{D}$-modulesに対しRS3的条件でFuchs性ないし確定特異性を定義した。M. Kashiwara − T. Kawai はRS2的条件でholonomic $\mathcal{E}$-modules with regular singularitiesを定義し，holonomic $\mathcal{D}$-modules のとき，それがRS3的条件と同値であることを示した。また，Deligneの意味で確定特異な有理接続は holonomic $\mathcal{D}$-modules with regular singularities であることも示した。

我々は，有理接続についてDeligneの意味で確定特異なことがRS4ないしRS3的条件で特徴付けられることを主張する。

証明は漸近解析（Hukuhara-Turrittin-Balser-Jurkat-Lutz の標準形，漸近解の存在定理，漸近展開可能函数の層に関する基本定理など）または，Malgrangeの手法＋αによっている。尚，この小論では漸近解析による証明の大略を述べるだけとする（末尾の注釈を参照されたい）。

2．主定理。 定理を述べるため記号を用意する．

X：n次元複素多様体，

Y：（簡単のため）Xの正規交叉因子（一般のときは特異点を解消してから考える），

Ω^q：X上の正則q-形式の芽の層（$q=0,1,\cdots,n$），$\Omega^0=\mathcal{O}$としばしば表わす，

$\Omega^q(*Y)$：$X-Y$で正則でY上に極をもつq-形式の芽の層（$q=0,1,\cdots,n$），$\Omega^0(*Y)=\mathcal{O}(*Y)$としばしば表わす，

$\mathcal{J}_Y$：Yの定義イデアル，

$\mathcal{O}_{X\hat{|}Y} = \mathrm{Proj}\lim_{k\to\infty} \mathcal{O}/\mathcal{J}_Y^k$，

$\iota:(X-Y)\hookrightarrow X$（自然な埋込），

$(X^\sim, pr: X^\sim\to X)$：$X$の$Y$に沿っての"real blow up"

$\mathcal{A}_0$：$X^\sim$上の$pr^{-1}(Y)$で0に漸近展開可能函数の芽の層，

$\mathcal{S}$：locally free sheaf of $\mathcal{O}(*Y)$-modules of rank m，

∇：$\mathcal{S}\to\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^1$ integrable connection。

$(\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^{\cdot},\nabla)$; $\mathcal{S}\xrightarrow{\nabla}\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^1\xrightarrow{\nabla}\cdots\xrightarrow{\nabla}\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^n\to 0$

$(\mathcal{S},\nabla)$ から拡張される De Rham 複体、

とすると、さらに自然に

$(\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot},\hat{\nabla})$; $\hat{\mathcal{S}}\xrightarrow{\hat{\nabla}}\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega^1\xrightarrow{\hat{\nabla}}\cdots\xrightarrow{\hat{\nabla}}\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega^n\to 0$, $\hat{\mathcal{S}}=\mathcal{S}\otimes\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$

$(\mathcal{S}^E\otimes\Omega^{\cdot},\nabla^E)$; $\mathcal{S}^E\xrightarrow{\nabla^E}\mathcal{S}^E\otimes\Omega^1\xrightarrow{\nabla^E}\cdots\xrightarrow{\nabla^E}\mathcal{S}^E\otimes\Omega^n\to 0$, $\mathcal{S}^E=\iota_*\iota^*\mathcal{S}$

$(\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot},\tilde{\nabla})$; $\tilde{\mathcal{S}}\xrightarrow{\tilde{\nabla}}\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^1\xrightarrow{\tilde{\nabla}}\cdots\xrightarrow{\tilde{\nabla}}\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^n\to 0$, $\tilde{\mathcal{S}}=\mathcal{S}\otimes(\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}/\mathcal{O}_{X|Y})$

$(\tilde{\mathcal{S}}^E\otimes\Omega^{\cdot},\tilde{\nabla}^E)$; $\tilde{\mathcal{S}}^E\xrightarrow{\tilde{\nabla}^E}\tilde{\mathcal{S}}^E\otimes\Omega^1\xrightarrow{\tilde{\nabla}^E}\cdots\xrightarrow{\tilde{\nabla}^E}\tilde{\mathcal{S}}^E\otimes\Omega^n\to 0$, $\tilde{\mathcal{S}}^E=\iota_*\iota^*\mathcal{S}/\mathcal{S}$

∇_0 ; $pr^*\mathcal{S}\otimes\mathcal{A}_0\to pr^*(\mathcal{S}\otimes\Omega^1)\otimes\mathcal{A}_0$

を考えることができる。

$$Y^1=\{y\in Y\ ;\ \mathrm{codim}_y Y=1\}$$

とおく

<u>主定理.</u> 積分可能有理接続 $(\mathcal{S},\nabla)$ が Deligne の意味で Y に沿って確定特異であることは下のいずれか（従って全て）の条件と同値である。

(RS4.1) $\forall y\in Y$ $H^0((\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y,\tilde{\nabla})(=\mathcal{H}^0(\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot};\tilde{\nabla})_y)=0$

(RS4.1)′ $\exists Y_0$ s.t. an open set of Y^1 containing a point of each component of Y, $\forall y\in Y$ $H^0((\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y,\tilde{\nabla})=0$

(RS4.1)″ $\exists Y_0$ s.t. an open set of Y^1 containing a point of each component of Y, $\forall y\in Y$ $H^i((\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y,\hat{\nabla})=0$ $i=0,1,\cdots,n$

(RS4.2) $\exists Y_0$ s.t. an open set of Y^1 containing a point of each component of Y, $\forall y\in Y$ $H^1(pr^{-1}(y),\mathrm{Ker}\,\nabla_0|_{pr^{-1}(y)})=0$

(RS3.1) $\forall y \in Y \quad H^i((\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \hat{\nabla}) \simeq H^i((\mathcal{S}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \nabla) \quad i=0,1,\cdots,n$

(RS3.1)′ $\exists Y_0$ s.t. an open set of Y^1 containing a point of each component of Y, $\forall y \in Y$

$$H^i((\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \hat{\nabla}) \simeq H^i((\mathcal{S}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \nabla) \quad i=0,1,\cdots,n.$$

さらに，(RS4.1)，(RS4.1)′，(RS4.1)″，(RS3.1)，(RS3.1)′において，$(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\nabla})$を$(\tilde{\mathcal{S}}^E, \tilde{\nabla}^E)$，$(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\nabla})$を$(\mathcal{S}^E, \nabla^E)$と置き換えて得られる条件を(RS4.3)，(RS4.3)′，(RS4.3)″，(RS3.2)，(RS3.2)′とする。

証明の手順は次の通りである。

[1] (RS4.1)″ ⇒ (RS4.1)′ は明らか。逆は次節の補題１（Poincaré's Lemma for $((\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \tilde{\nabla})$ at a generic point y）による

[2] (RS4.1)′ ⇔ (RS4.2) は次節の補題２（Isomorphism Lemma at a generic point）による

[3] (RS4.2) ⇒ Y_0でreg.sing ⇒ Yでreg.sing. を次節の補題３により背理法で示す。

[4] Yでreg.sing ⇒ (RS.4.1) ⇒ (RS.4.1)′ を方程式の標準形を用いて直接示す。実は，$\forall y \in Y \quad H^i((\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \tilde{\nabla}) = 0 \quad i=0,1,2\cdots n$がいえる。

[5] (RS3.1)′ ⇔ (RS4.1)″ は，$0 \to \mathcal{S} \to \hat{\mathcal{S}} \to \tilde{\mathcal{S}} \to 0$ (exact) より従う。また，[4]の結果とこの完全列から，Yでreg. sing ⇒ (RS3.1) ⇒ (RS3.1)′。

3．主な補題．

補題1．(Poincaré's Lemma for $((\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \nabla)$)

$^{\exists}Y_0$ s.t. an open dense set of Y^1, $^{\forall}y \in Y_0$

$$\mathcal{S}_y \xrightarrow{\tilde{\nabla}} (\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^1)_y \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \cdots\cdots \xrightarrow{\tilde{\nabla}} (\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^n)_y \to 0 \quad \text{(exact)}$$

i.e. $H^i((\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \tilde{\nabla}) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots n.$

補題2．(Isomorphism theorem)

$^{\exists}Y_0$ s.t. an open dense set of Y^1, $^{\forall}y \in Y_0$

$$H^1(pr^{-1}(y, \mathrm{Ker}\,\nabla_0|_{pr^{-1}(y)}) \simeq H^0((\tilde{\mathcal{S}}\otimes\Omega^{\cdot})_y, \tilde{\nabla})$$

この２つの補題は，次節の命題1,2と漸近解析における消滅定理（ $H^1(pr^{-1}(y), \mathcal{A}_0|_{pr^{-1}(y)}) \to H^1(pr^{-1}(y), \mathcal{A}|_{pr^{-1}(y)})$ は零写像）により証明される。

補題3．$^{\exists}Y_0$ s.t. an open dense set of Y^1 $^{\forall}y \in Y_0$

∇ が y で不確定特異ならば $\dim H^1(pr^{-1}(y), \mathrm{Ker}\,\nabla_0|_{pr^{-1}(y)}) > 0$.

この補題は次節の命題1,4から示される。

全ての問題は局所的なので，Pfaff方程式の特異点の近傍での解の解析に帰着される。

4. 鍵となる命題.

次のような Pfaff 方程式系を考える。

$$(S)\begin{cases} du - \Omega u = 0 \\ \Omega = \sum_{i=2}^{n} \frac{A_i(x)}{x_1^{\alpha_i}} dx_i + \frac{A_1(x)}{x_1^{\alpha_1} x_1} dx_1, \\ d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0, \end{cases}$$

ここで, $\alpha_i \in \mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$, $A_i(x)$ は $D = D_1(0, r_1) \times \cdots \times D_n(0, r_n) (\subset \mathbb{C}^n)$ で正則な函数を元とする m 次正方行列。

定義. $b = (0, b') \in D$ が (S) の reducible point であるとは, 或る b' の近傍 V' があって, (S) は次のような形の形式的基本解行列

$$\hat{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, x_1^{J} \exp[Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

をもつこととする。ここで,

$$\hat{P}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=-\lambda}^{\infty} P_i(x')\, x_1^{\frac{i}{\mu}} \quad (\mu \in \mathbb{N}^*,\ P_i(x') \text{ は } V' \text{ で正則})$$

$$J \in M(m, \mathbb{C})$$

$$Q(x) = \oplus\, \mathrm{diag}\{ g(x) I_s, g(x_1 e^{2\pi\sqrt{-1}}, x') I_s, \cdots, g(x_1 e^{2\pi\sqrt{-1}(\mu-1)}, x') I_s \}$$

$g(x) = \hat{g}(x_1^{\frac{1}{\mu}}, x')$ (定数項のない $\mathcal{O}(V')$ 係数の $x_1^{-\frac{1}{\mu}}$ に関する多項式)

$$[Q(x), J] = 0.$$

すなわち, $u = \hat{P}(x) v$ なる変換で (S) は

$$dv - \left(dQ + \frac{J}{x_1} dx_1\right) v = 0$$

に変換されることをいう。

命題1. (analogue of Hukuhara-Turrittin-Balser-Jurkat-Lutz 'Theorem)

$\exists$ V_0 s.t an open dense set of $V = \{b \in D \,;\, b_1 = 0\}$

$\forall$ $b \in V_0$ is a reducible point for (S).

この命題は，Hukuhara-Turrittin-Balser-Jurkat-Lutz の標準形定理の証明と似た方法で示せる。

命題2 (existence theorem of asymptotic solutions)

$b \in V$ を reducible point とする。また $k \in \{1, \cdots, n\}$ とする。このとき積分可能系

$$(S)_k \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{A_1(x)}{x_1^{\alpha_1} x_1}\right) w = b_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{A_i(x)}{x_1^{\alpha_i}}\right) w = b_i \quad i = 2, \cdots, k \end{array} \right.$$

を考える。ここで，$b_1, \cdots, b_k$ はある x_1 の巾をかけると $x_2, \cdots, x_n$ について一様な漸近展開可能な函数とする。もし，$(S)_k$ が形式有理的解 $\hat{w} \in ((\mathcal{O}_{\hat{D_1}} \otimes \mathcal{O}(\times V'))(\{0\} \times V'))^m$ をもつならば，十分小な角領域 $S = S_1 \times V''$ ($S_1 \subset D_1$, $b \in V'' \subset V'$) 上に $(S)_k$ の解で $\hat{w}$ に一様漸近展開可能なものが存在する。

この命題は，Hukuhara 先生流に証明できる。

命題3. (existence theorem of asymptotic fundamental solution matrix)

$b \in V$ を reducible point とする。十分小な角領域 $S = S_1 \times V''$ ($S_1 \subset D_1$, $b \in V'' \subset V'$) に対して，$\hat{P}(x)$ に S

上一様漸近展開可能な函数 $P_S(x)$ があって，$P_S(x) x_1^J \times \exp[Q(x)]$ は (S) の S 上の基本解行列となる。

この命題は前命題と reducible point の定義から示される。

$(D^{\sim}, pr: D^{\sim} \to D)$ を D の V に沿っての real blow up とする。$b \in V^{\sim}$ に対し，$pr^{-1}(b) \cong S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ となっている。

$$n(b, \theta) \overset{def}{=} \dim \operatorname{Ker}(d-\Omega)|_{\mathcal{A}_0 | pr^{-1}(b)}, \quad \theta \in pr^{-1}(b)$$

と定義する。

命題4.

$b \in V$ を reducible point とする。このとき，

$$\dim H^1(pr^{-1}(b), \operatorname{Ker}(d-\Omega)|_{\mathcal{A}_0 | pr^{-1}(b)})$$
$$= \frac{1}{2} (\text{total variation of } n(b, \theta))$$

ここで，$n(b, \theta)$ は $[0, 2\pi)$ から $\{1, \cdots, m\}$ への有限個の不連続点をもつ函数となっており、もし，$Q(x) \neq 0$ ならば，本当に不連続点を持ち $\dim H^1(pr^{-1}(b), \operatorname{Ker}(d-\Omega)|_{\mathcal{A}_0 | pr^{-1}(b)}) > 0$ となる。そうでなければ，この次元は0に等しい。

函数 $n(b, \theta)$ の性質は命題1と3とから分る。とくに，Balser-Jurkat-Lutz の標準形のように $Q(x)$ を "super block" 構造を持っているようにしたことに注目されたい。残りの部分は，I を $n(b, \theta)$ の不連続点の集合としたとき，

$$0 \to \operatorname{Ker}(d-\Omega)|_{\mathcal{A}_0 | pr^{-1}(b))_{[0,2\pi) \setminus I}} \to \operatorname{Ker}(d-\Omega)|_{\mathcal{A}_0 | pr^{-1}(b))}$$

$$\to \left(\mathrm{Ker}\,(d-\Omega)|_{\mathcal{X}_0|pr^{-1}(b)}\right)_{[0,2\pi)\times\mathbb{C}} \to 0$$

という完全系列を得，これから出てくる長完全系列を用いることにより計算できる。

5. 注釈.

4.で、考えた方程式系(S)において，$\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ならば Cauchy-Kowalevski の定理を $(\frac{\partial}{\partial x_n}-A_n(x))u=g$ に適用することにより、

$$H^i((\mathcal{S}\otimes\Omega)_b,\nabla)\simeq H^i((\mathcal{S}\otimes\Omega|_{\{x_n=b_n\}})_{b^*},\nabla|_{\{x_n=b_n\}})\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

$$H^n((\mathcal{S}\otimes\Omega)_b,\nabla)=0$$

$$H^i((\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega)_b,\nabla)\simeq H^i((\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega|_{\{x_n=b_n\}})_{b^*},\nabla|_{\{x_n=b_n\}})\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

$$H^n((\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega)_b,\nabla)=0$$

を示すことができる。ここで，$b\in V$, $b=(b_1,\cdots,b_n)$, $b^*=(b_1,\cdots,b_{n-1})$ $|_{\{x_n=b_n\}}$ は $\{x_n=b_n\}$ 上への制限を表わす。また $\nabla=d-\Omega$ とした。これより、(RS3.1) $H^i((\mathcal{S}\otimes\Omega)_b,\nabla)\simeq H^i((\hat{\mathcal{S}}\otimes\Omega)_b,\nabla)$ $i=0,1,\cdots,n$ ならば，$\{x_n=b_n\}$ 上でも同様の条件がみたされ，結局一次元の場合に帰着され，(RS3.1) が reg. sing を意味することが示される。今，考えてきた方程式系は D 全体で holonomic な $\mathcal{D}$-module に対応している。4で考えたものは $(D-V)$ で holonomic な $\mathcal{D}$-module であるが，D 全体では holonomic かどうか分らない。この状況ではすぐ上で述べた手法は使えなかったことに

ことに注意されたい。Kawai-Kashiwara の論文では全空間で holonomic な $\mathcal{D}_X$-module を考えて，すぐ上に述べた手法に似ていると思われるやり方で (RS3.1) が reg. sing. を意味することを証明しているように見える。$\mathcal{M}$ が holonomic $\mathcal{D}_X$-module outside Y のとき $\mathcal{H}^0_{[X|Y]}(\mathcal{M})$ が全空間で holonomic になるとしても局所化しているのだから $\mathcal{H}^0_{[X|Y]}(\mathcal{M})$ に直接，全空間で holonomic な場合の議論を適用できるのかよく分らない。こういう事情で 3.4 のような証明をした。いずれにせよ，有理接続の中から RS3 or 4 的な条件で reg. sing. を特徴付けた論文は我々以前にはない（はっきり書かれたものはない）ように思う。

それから H. Komatsu の論文で $\mathcal{B}/\mathcal{D}'$（ここで $\mathcal{B}$ は hyperfunction の層，$\mathcal{D}'$ は distribution の層）を用いて，reg. sing が (RS4) 型の条件として特徴付けられることを常微分方程式の場合に示している。有理接続（多変数）の場合にもどうようのことが主張できるのではないかと思っているがまだ証明はない。

本論の詳細は Y. Sibuya 氏との共著を見られたい（準備中）.

REFERENCES.

[1] Balser, W., Jurkat, B., Lutz, D.A.: A general theory of invariants for meromorphic differential equations; Part I, formal invariants; Part II, proper invariants, Funk. Ekva., 22, 197-221,257-283 (1979)

[2] Bertrand, D.: Travaux recents sur les points singuliers des equations differentielles lineaires, Sem. Bourbaki, 538, 1978/79

[3] Birkhoff, G.D.: Singular points of ordinary linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 10, p.436-470 (1909)

[4] Birkhoff, G.D.: A simplified treatment of the regular singular point, Trans. Amer. Math. Soc., 11, 199-202 (1910)

[5] Birkhoff, G. D.: The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference equations, Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., Vol. 49, pp.521-568 (1913).

[6] Bjork, J.-E.: Rings of Differential operators, North-Holland Mathematical Library, vol.21 (1979).

[7] Coddington, E. and Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York (1955)

[8] Cope, F.T.: Fformal solutions of irregular linear differential equations, I, II, Amer. J. Math., 56, 411-437 (1934);58, 130-140 (1936)

[9] Deligne, P.: Equations Diffeentielles a Points Singuliers Reguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag (1970) et Corection au Lect. Note 163, Warwick University - April 1971.

[10] Deligne, P.: Lettre a Malrange (Aout 1977 et Avril 1978)

[11] Gerard, R. and Levelt, A.: Invariants mesurant l'irregularite en un point singulier des sytemes d'equations differntielles lineaires, Ann. Inst. Fourier, 23, 157-195 (1973)

[12] Gerard, R. and Levelt, A.: Ssur les connections a singularites reguliers dans le cas de plusieurs variables, Funk. Ekva. 19, 149-173 (1976)

[13] Griffiths, P. and Harris, J.: Principles of algebraic geometry, Pure and Applied Math. Wiley-Interscience Pub., J. Wiley & Sons, New York (1978)

[14] Grothendieck, A.: On the De Rham cohomology of algebraic varieties, Pub. Math. I.H.E.S., 29, (1966), p.351-p.359.

[15] Harris, W.A. Jr.: Analytic theory of linear differential systems, Lect. Note in Math. 243, 229-237, Springer-Verlag (1971)

[16] Hukuhara, M.: Sur les points singuliers des equations differentielles lineaires, II, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 5, p.157-p.166 (1937)

[17] Hukuhara, M.,: Sur les points singuliers des equations differen tielles lineaires, III, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 2, p.125-p.137 (1942)

[18] Ince, E.L.: Ordinary differential equations, Dover, New York (1944)

[19] Jurkat, W.B.: Meromorphe Differentialgleihungen, Lect. Notes in Math. 637, Springer-Verlag (1976)

[20] Jurkat, W.B. and Lutz, D.A.: On the order of solutions of analytic differential equations, Proc. London Math. Soc., 22, 465-482 (1971)

[21] Kashiwara, M.: On the holonomic systems of linear differential equations, II, Inventiones Math. 49, 121-135 (1978)

[22] Kashiwara, M. and Kawai, T.: On holonomic systems of micro-differential equations III -systems with regular singularities-, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 17 (1981), p.813-p.979.

[23] Kashiwara, M. and Kawai, T.: Theory of holonomic systems, Sugaku, 34, 243-257 (1982) (in japanese)

[24] Katz, N.: Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turrittin, Pub. Math. IHES., 39, 175-232 (1970)

[25] Katz, N.: Actes, Congres intern. math., Tome 1, 437-443 (1970)

[26] Katz, N.: An overview of Deligne's Work on Hilbert's Twenty-first problem, Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. 28, p.537-p.557 (1976)

[27] Kitagawa, K.: L'irregularite en un point singulier d'un systeme d'equations differentielles lineaires d'ordre 1, preprint (1982) to be published in J. Kyoto Univ. (1983)

[28] Komatsu, H.: On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Ssci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 18, 379-398 (1971)

[29] Komatsu, H.: On the regularity of hyperfunction solutions of linear ordinary differential equations with real analytic coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20, 107-119 (1073)

[30] Komatsu, H.: Introduction to the theory of hyperfunctions, Kiso-sugaku, Iwanami, Tokyo (1978) (in japanese)

[31] Kohno, M. and Ohkubo, K.: Asymptotic expansions, Kyoikushuppan, Tokyo, 1976.

[32] Lutz, D.A.: On systems of linear differential equations having regular singular solutions, J. Diff. Equ., 3, 311-322 (1967)

[33] Lutz, D.A.: Some characterizations of systems of linear differential equations having regular singular solutions, Trans. Amer. Math., Soc., 126 427-441 (1967)

[34] Majima, H: Analogues of Cartan's decomposition theorems in asymptotic analysis, Funk. Ekva. Vol.26, No.2 (1983), 131-154

[35] Majima, H.: Vanishing theorems in asymptotic analysis, Proc. Japan Acad. 59, Ser. A, (1983) 146-149.

[36] Majima, H.: Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points, preprint (1983).

[37] Malgrange, B.: Remarques sur les points singuliers des equations differentielles, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, ser. A, 1136-1137 (1971)

[38] Malgrange, B.: Sur les points singuliers des equations differentielles, l'Enseignment math., 20, p.147-p.176 (1974)

[39] Malgrange, B.: Remarques sur les equations differentielles a points singuliers irreguliers, Lecture Notes in Math. 712, Springer Verlag, p.77-p.86 (1979)

[40] Malgrange, B.: La classification des connections irregulieres a une variable; Sur les deformations isomonodromiques, preprint 1982, to be published in Prog. in Math., Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, Ssem. ENS. 1980/81 (1983)

[41] Malmquist, J.: Sur l'etudes analytique des solutions d'un systeme des equations diffeentielles dans le voisinage d'un point singulier d'indetermination, I, II, III, Acta Math., 73, p.87-p.129 (1940), Acta Math. 74, p.1-p.64, p.109-p.128 (1941)

[42] Manin, J.: Moduli fuchsiani, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 19, 113-126 (1965)

[43] Moser, J.: The order of a singularity in Fuchs' theory, Math. Zei. 72, 379-398 (1982)

[44] Nilsson, N: Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, Arkiv. for Math., 5, 527-540 (1963-65)

[45] Oda, Tadao: Introduction to algebraic analysis on complex manifolds, Advanced Studies in Pure Mathematics 1, Algebraic varieties and analytic varieties, 29-48 (1983)

[46] Pham, F.: Ssingularites des systemes differentiels de Gauss-Manin, Prog. in Math. 2, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart (1979)

[47] Poincare, H.: Sur les integrales des equations lineaires, Acta Math., 8, p.295-p.344 (1886)

[48] Ramis, J.-P.: Variation sur le theme "GAGA", Lecture Notes in Math. 694, Springer-Verlag, p.228-p.289 (1978).

[49] Ramis, J.-P.: Dimension cohomologique locale des modules Fuchsiens, Bull. Soc. math. France, 108, (1980), p.341-p.363.

[50] Sibuya, Y.: Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point, Funk. Ekva., 4, p.29-p.56 (1962)

[51] Sibuya, Y.: Linear ordinary differential equations in the complex domain - connection problems -, (in japanese), Kinokuniya-shoten (1976)

[52] Sibuya, Y.: Stokes phenomena. Bull. A.M.S., 83, p.1075-p.1077 (1977)

[53] Takano, K. and Yoshida, M.: On a linear system of Pfaffian equations with regular singular points, Funk. Ekva. 19, 147-176 (1976)

[54] Trjitzinsky, W.J.: Aanalytic theory of linear differential equations, Acta Math., 62, p.167-p.226 (1933)

[55] Turrittin, H.L.: Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary linear differential equations containing a parameter, Ann. of Math. St. 29 (Contribution to the theory of nonlinear oscillations edited by S. Lefschetz), Princeton, p.81-p.116 (1952)

[56] Turrittin, H.L.: Convergent solutions of ordinary homogeneous differential equations in the neibourhood of a singular point. Acta. Math. 93, p.27-p.66 (1955)

[57] van den Essen, A.R.P.: Regular singularities along normal crossings, Lect. Notes in Math. 712, Springer-Verlag, 87-130 (1979)

[58] van den Essen, A.R.P., Fuchsian systems of linear differential equations associated to Nilsson class functions and an application to Feynmann integrals, Lecture Notes in Physics, 126, Springer-Verlag p.117-p.122 (1980).

[59] Wasow, W.: Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience (1965) or R.E. Krieger Pub. Comp. (1976)

[ ] Horn, I.: Zur theorie der systeme linearer differentialgleichungen mit einer unabbhangigen veranderlichen. II, Math. Ann. 40, 527-550 (1892)

[ ] Sauvage, M.L.: Sur les solutions reguliers d'un systeme d'equations differentielles, Ann. Sci. Ecole Norm. Ssup. III, 3, 391-404 (1886)